PREPAVOGT
Filière IAGE
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 222 31 77 63
E-Mail. : @
Site : www.prepavogt.org

Yaoundé, le 22 mai 2019

CYCLE INGENIEUR EN AGRO-INDUSTRIE, GEOLOGIE & ENVIRONNEMENT

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C, D, E, F, TI, et GCE/AL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 2 HEURES

EXERCICE 1 (5,5 POINTS)

1. Soit n un entier naturel, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n t\, dt$.
   a. Calculer I_0, I_1 et I_2. **1,00pt**
   b. Calculer la dérivée de la fonction h définie par $h(t) = cos^n t\, sint$. **0,50pt**
   c. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. **1,00pt**
   d. Calculer I_3 et I_4 **0,50pt**
2. Un sac contient six boules rouges numérotées de 1 à 6 et trois blanches numérotées de 1 à 3. On extrait simultanément deux boules du sac et qui portent les numéros a et b. On admet l'équiprobabilité de sortie de toutes les paires de boules possibles. On considère la variable aléatoire réelle X définie de la manière suivante : Si les deux boules sont blanches X prend la valeur de $a + b$; si les deux boules sont rouges X prend la valeur de $|a - b|$ et si les deux boules sont de couleurs différentes, X prend la valeur 0
   a. Déterminer la loi de probabilité de X. **1,00pt**
   b. Déterminer la probabilité des événements : $(X \leq 1)$ et $(2 \leq X \leq 4)$. **1,00pt**
   c. Calculer l'espérance mathématique de X. **0,50pt**

<u>EXERCICE 2</u> (5,5 POINTS)

On donne le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - (6+6i)z^2 + (10+36i)z - 60i$ où z est une variable complexe. On admettra dans la suite de l'exercice que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$) où les points A, B et C ont pour affixes respectives $z_A = 6i$, $z_B = 3 - i$ et $z_C = -2 + i$.

1. Vérifier que $6i$ est une racine de P. **0,50pt**
2. Déterminer les nombres complexes b et c tels que : $P(z) = (z - 6i)(z^2 + bz + c)$. **1,00pt**
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **1,00pt**
4. Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$. **1,50pt**
5. Trouver l'expression complexe de la rotation R de centre C qui transforme B en A. **1,00pt**
6. Quel est l'angle de la rotation R ? **0,50pt**

<u>PROBLEME</u> (9 POINTS)

On considère g et f deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{2x} - 2x - 1 \quad \text{et} \quad f(x) = (x+1)e^{-2x} + x + 1$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1.
   a. Etudier la variation de g et dresser le tableau de variation. **1,00pt**
   b. Déterminer en fonction de x le signe de $g(x)$. **0.50pt**
2. Calculer la dérivée de f et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-2x}g(x)$. **1,00pt**
3. Dresser le tableau de variation de f. **1,00pt**
4. Montrer que (C_f) admet une asymptote (D) en $+\infty$ et en donner une équation. **0.50pt**
5. Etudier les positions relatives de (C_f) et (D). **0,50pt**
6. Calculer la limite en $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique. **1,00pt**
7. Construire la courbe (C_f). **1,50pt**
8. Soit α un nombre réel plus grand que -1. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $-1 \le x \le \alpha$ et $x + 1 \le y \le f(x)$.
   a. Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α à l'aide d'une intégration par partie. **1,00pt**
   b. Démontrer que $A(\alpha)$ admet une limite ℓ lorsque α tend vers $+\infty$. **1,00pt**

Fin de l'épreuve